

# Esercitazione 2

Lezione 17.10.2017

## Travi reticolari

Risolviamo la capriata reticolare all'inglese rappresentata in Figura 6.

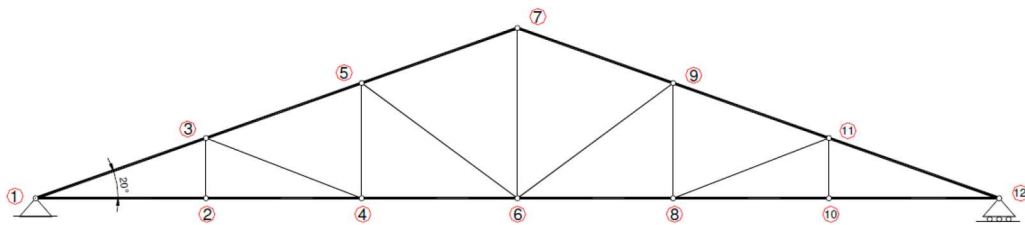


FIGURA 6: Capriata reticolare all'inglese. Schema statico

Nodo	x [m]	y [m]
1	-4.00	0
2	-2.63	0
3	-2.63	0.51
4	-1.32	0
5	-1.32	0.98
6	0	0
7	0	1.44
8	1.32	0
9	1.32	0.98
10	2.63	0
11	2.63	0.51
12	4.00	0

TABELLA 1: Geometria capriata: posizione nodi

### Analisi dei carichi

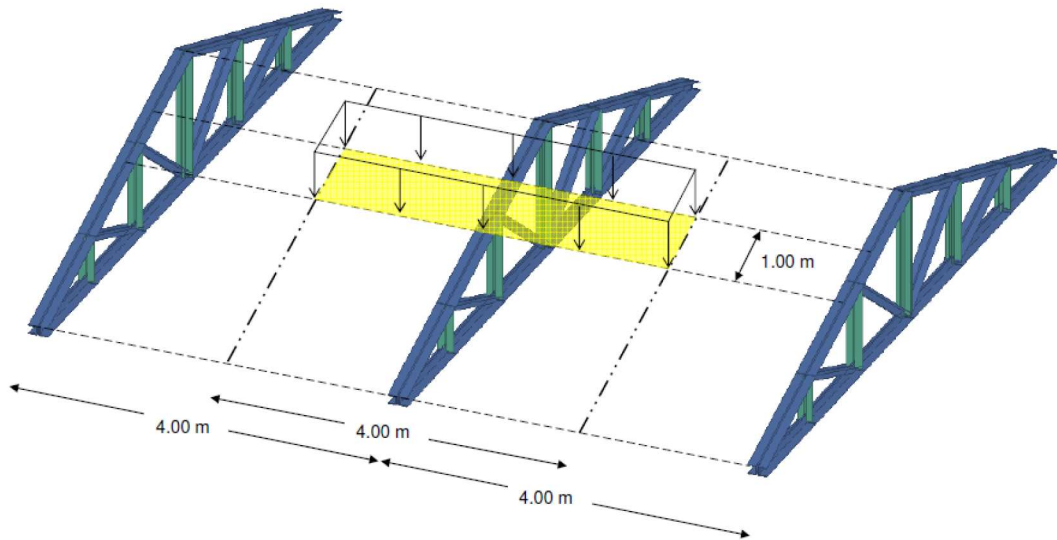


FIGURA 7: Area d'influenza per i carichi sulla copertura

Carichi per  $m^2$  di copertura:

- Sovraccarico accidentale (neve):  $1.00 \text{ kN/m}^2$
- Impermeabilizzazione:  $0.10 \text{ kN/m}^2$
- Lastre di copertura prefabbricate:  $1.90 \text{ kN/m}^2$
- Totale:  $3.00 \text{ kN/m}^2 \cdot 4.00 \text{ m} = 12 \text{ kN/m}$

Carico al metro lineare:  $3.00 \text{ kN/m}^2 \cdot 4.00 \text{ m} = 12 \text{ kN/m}$

Tutti i carichi agenti sulle aste vanno trasferiti ai nodi di estremità come carichi concentrati.

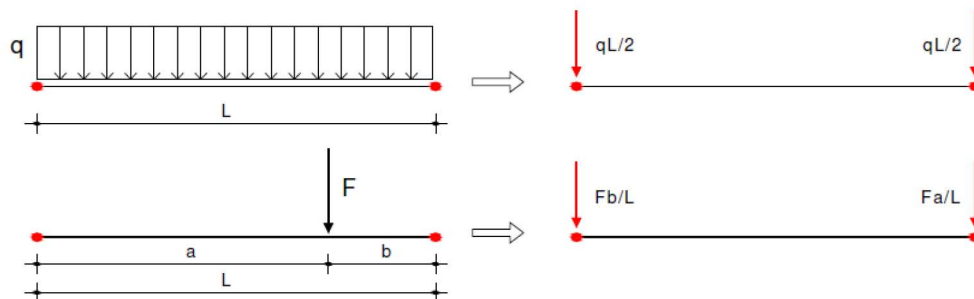


FIGURA 8: Esempio di ripartizione dei carichi concentrati sui nodi

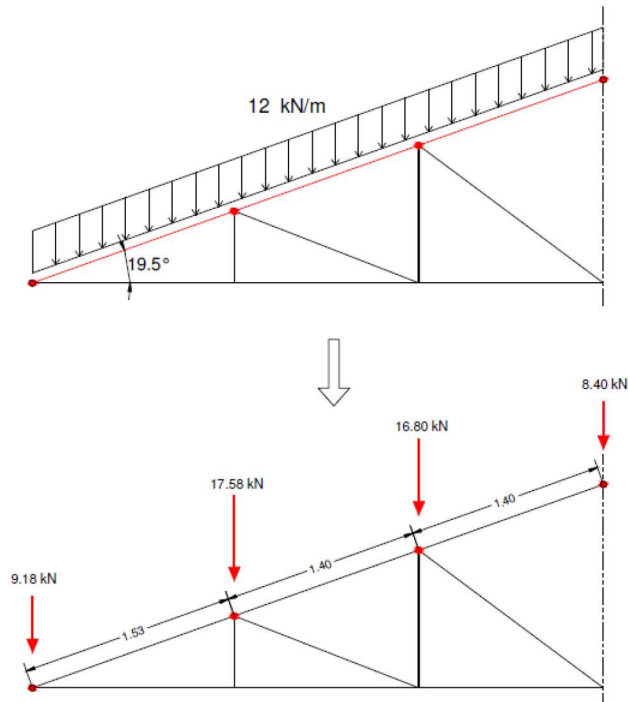


FIGURA 9: Ripartizione dei carichi concentrati sui nodi

Si riportano di seguito i pesi propri delle aste che costituiscono la capriata in oggetto.

Asta	Lunghezza [m]	Peso al [m.lin]	Carico nodale [N]
1-2	1.44	120	172.8
2-4	1.32	120	158.4
4-6	1.32	120	158.4
6-8	1.32	120	158.4
8-10	1.32	120	158.4
10-12	1.44	120	172.8
1-3	1.53	120	183.6
3-5	1.4	120	168
5-7	1.4	120	168
7-9	1.4	120	168
9-11	1.4	120	168
11-12	1.53	120	183.6
2-3	0.51	95	48.4
4-5	0.98	95	93
6-7	1.44	95	273.6
8-9	0.98	95	93
10-11	0.51	95	48.4
3-4	1.41	95	134
5-6	1.64	95	156
6-9	1.64	95	156
8-11	1.41	95	134

TABELLA 2: Peso proprio delle aste

## Risoluzione con il metodo analitico dei nodi

La Figura 10 riporta lo schema statico finale con tutti i carichi nodali applicati.

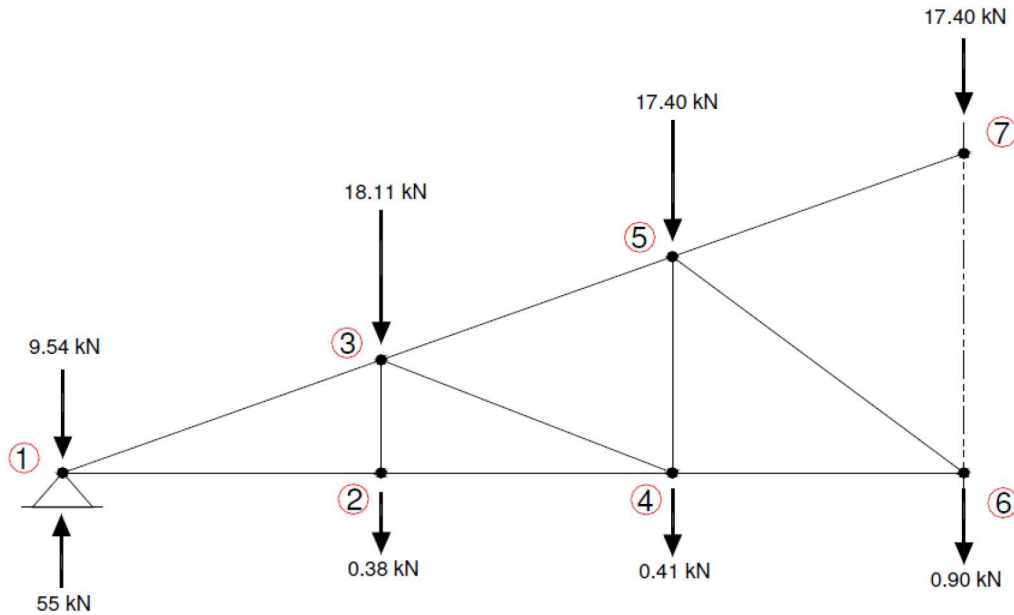


FIGURA 10: Schema statico finale con i carichi nodali applicati

### Calcolo delle reazioni vincolari esterne

Per la stabilità esterna della struttura deve essere:

$$H_1 = 0$$

$$V_1 + V_2 = \Sigma F = 110 \text{ kN}$$

Poiché la struttura è simmetrica e simmetricamente caricata:

$$V_1 = V_2 = \frac{110 \text{ kN}}{2} = 55 \text{ kN}$$

### Calcolo degli sforzi nelle aste

Calcoleremo, per ovvi motivi di simmetria, soltanto metà struttura. È necessario individuare un nodo semplice o canonico, definito come nodo in cui convergono due aste e scriviamo le due equazioni di equilibrio. Nel nostro caso partiamo dal nodo 1.

**Nodo 1**

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{1-2} + R_{1-3} \cos(\alpha) = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 55 - 9.54 + R_{1-3} \sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda si ricava:

$$R_{1-3} = -\frac{45.46}{\sin \alpha} = -136.5 \text{ kN}$$

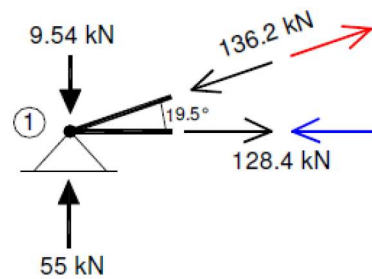
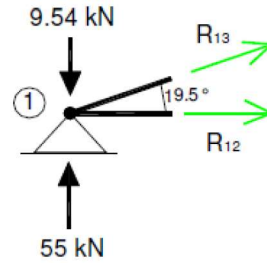
Essendo  $< 0$  cambiamo il verso prescelto.

Sostituendo nella prima equazione:

$$R_{1-2} = 136.5 \cdot \cos \alpha = 128.4 \text{ kN}$$

Poiché gli sforzi sull'asta sono uguali e opposti alle azioni sui nodi:

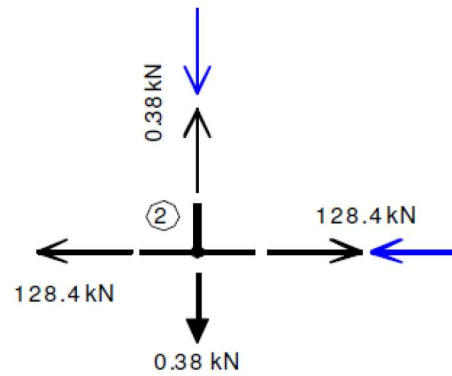
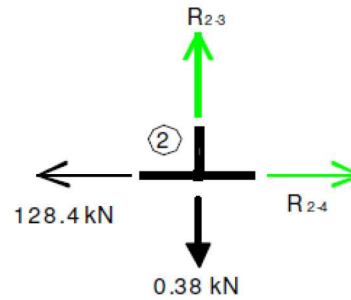
- asta 1-3  $\Rightarrow$  **puntone** (compressione)
- asta 1-2  $\Rightarrow$  **tirante** (trazione).



**Nodo 2**

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{2-4} - 128.4 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{2-3} - 0.38 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{2-4} = 128.4 \text{ kN} \\ R_{2-3} = 0.38 \text{ kN} \end{cases}$$



**Nodo 3**

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 136.2 \cdot \cos(\alpha) + R_{3-4} \cdot \cos(\beta) + R_{3-5} \cdot \cos(\alpha) = 0 \\ 136.2 \cdot \sin(\alpha) - 18.11 - 0.38 + R_{3-5} \cdot \sin(\alpha) - R_{3-4} \cdot \sin(\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.94 \cdot (R_{3-5} + R_{3-4}) = -128.4 \text{ kN} \\ 0.33 \cdot (R_{3-5} - R_{3-4}) = -27.02 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R_{3-5} + R_{3-4}) = -136.6 \text{ kN} \\ (R_{3-5} - R_{3-4}) = -81.9 \text{ kN} \end{cases}$$

Dalla seconda:

$$R_{3-5} = R_{3-4} - 81.9 \text{ kN}$$

Sostituendo nella prima:

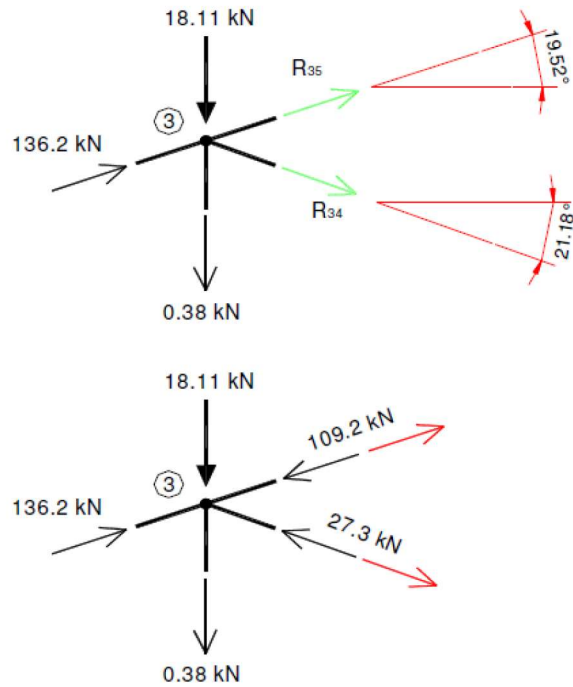
$$R_{3-4} - 81.9 + R_{3-4} = -136.6 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow 2 R_{3-4} = 54.27$$

$$\Rightarrow R_{3-4} = -27.3 \text{ kN}$$

Per cui:

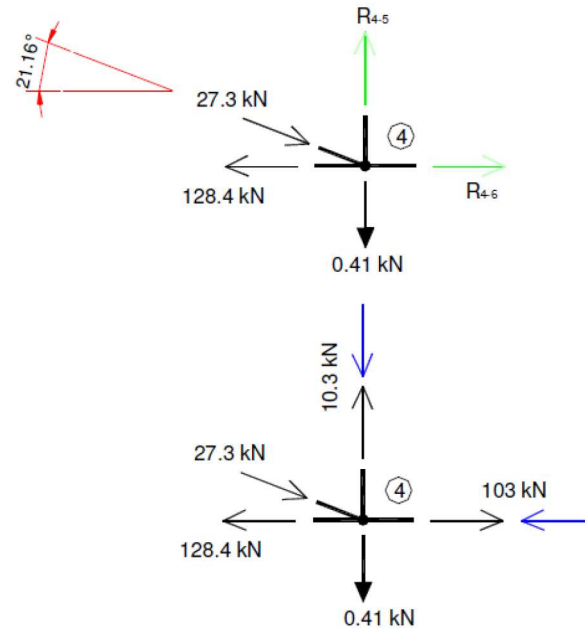
$$R_{3-5} = -109.2 \text{ kN}$$



**Nodo 4**

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow 27.3 \cdot \cos(\beta) + R_{4-6} - 128.4 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{4-5} - 0.41 - 27.3 \cdot \sin(\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{4-6} = 103 \text{ kN} \\ R_{4-5} = 10.3 \text{ kN} \end{cases}$$





**Nodo 5**

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 109.2 \cdot \cos(\alpha) + R_{5-7} \cdot \cos(\alpha) + R_{5-6} \cdot \cos(\gamma) = 0 \\ 109.2 \cdot \sin(\alpha) + R_{5-7} \cdot \sin(\alpha) - R_{5-6} \cdot \sin(\gamma) - 17.40 - 10.3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 103 + R_{5-7} \cdot 0.94 + R_{5-6} \cdot 0.80 = 0 \\ 36.5 + R_{5-7} \cdot 0.33 - R_{5-6} \cdot 0.60 - 17.40 - 10.3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{5-7} \cdot 0.94 + R_{5-6} \cdot 0.80 = -103 \\ R_{5-7} \cdot 0.33 - R_{5-6} \cdot 0.60 = -8.8 \end{cases}$$

Dalla seconda:

$$R_{5-7} = 1.82 \cdot R_{5-6} - 26.7$$

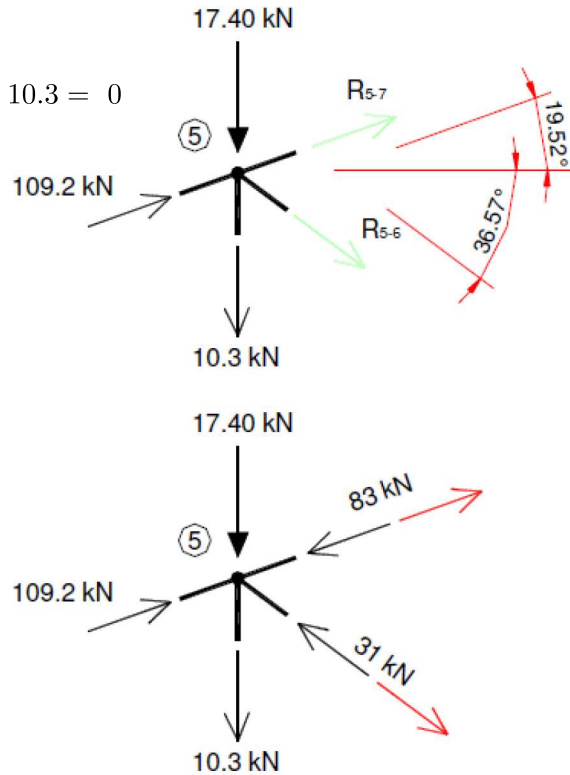
Sostituendo nella prima:

$$1.71 \cdot R_{5-6} - 25.1 + R_{5-6} \cdot 0.80 = -103$$

$$\Rightarrow R_{5-6} = -31 \text{ kN}$$

Per cui:

$$R_{5-7} = -56.11 - 26.7 = -83 \text{ kN}$$



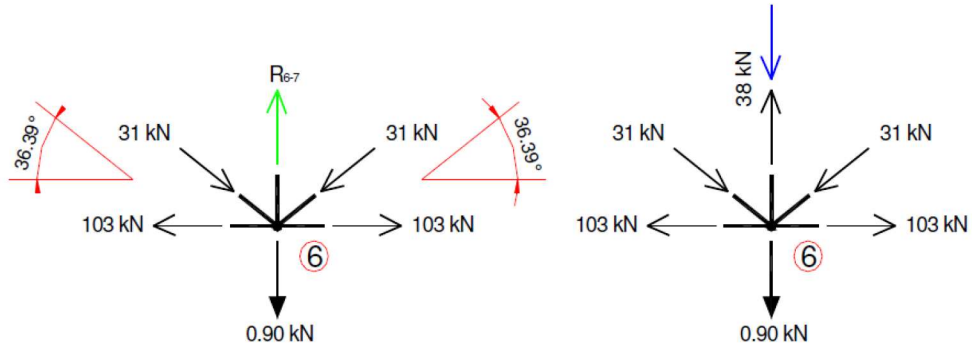
Invertiamo i versi prescelto poiché le soluzioni sono entrambe negative.

**Nodo 6**

L'equilibrio alla traslazione orizzontale del nodo 6 è ovviamente garantito pertanto basta esplicitare la sola equazione di equilibrio alla traslazione verticale:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{6-7} - 0.90 - 2 \cdot 31 \cdot \sin(\gamma) = 0$$

$$\Rightarrow R_{6-7} = 38 \text{ kN}$$



Nella Tabella ?? si riportano le sollecitazioni di tutte le aste.

Asta	Sforzo [kN]	Tipo
1-2	128.4	TIRANTE
2-4	128.4	TIRANTE
4-6	103	TIRANTE
6-8	103	TIRANTE
8-10	128.4	TIRANTE
10-12	128.4	TIRANTE
1-3	-136.2	PUNTONE
3-5	-109.2	PUNTONE
5-7	-83	PUNTONE
7-9	-83	PUNTONE
9-11	-109.2	PUNTONE
11-12	-136.2	PUNTONE
2-3	0.38	TIRANTE
4-5	10.3	TIRANTE
6-7	38	TIRANTE
8-9	10.3	TIRANTE
10-11	0.38	TIRANTE
3-4	-27.3	PUNTONE
5-6	-31	PUNTONE
6-9	-31	PUNTONE
8-11	-27.3	PUNTONE

TABELLA 3: Sollecitazioni delle aste

Nella Figura 11 sono evidenziate le sollecitazioni delle aste.

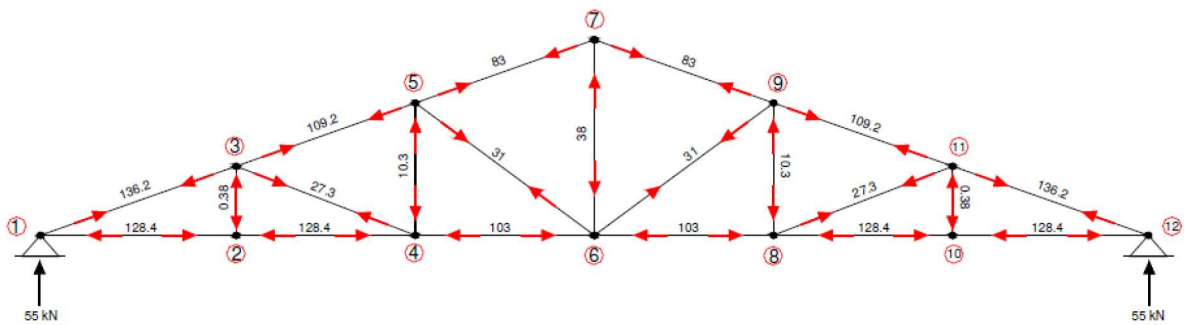


FIGURA 11: Sollecitazione su ciascuna asta

## Risoluzione con il metodo delle sezioni di Ritter

Un altro metodo per il calcolo di una travatura reticolare isostatica è quello delle sezioni di Ritter. Prendiamo in esame la struttura riportata in Figura 12:

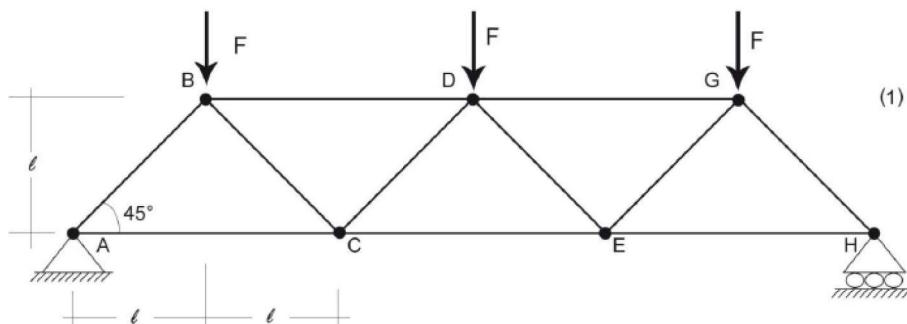


FIGURA 12: Travatura reticolare isostatica

Il primo passo è quello di verificare che la struttura sia isostatica, poiché se fosse iperstatica non saremmo in grado di utilizzare questa modalità di calcolo. Inoltre, possiamo subito dire quali sono le reazioni vincolari esterne, calcolando l'equilibrio alla traslazione verticale ed utilizzando la simmetria sia della struttura sia del carico (quando una struttura è simmetrica e caricata simmetricamente, le reazioni vincolari sono simmetriche):

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 3F - R_A - R_B = 0 \Rightarrow 3F = 2R_A \Rightarrow \frac{3}{2}F = R_A = R_B$$

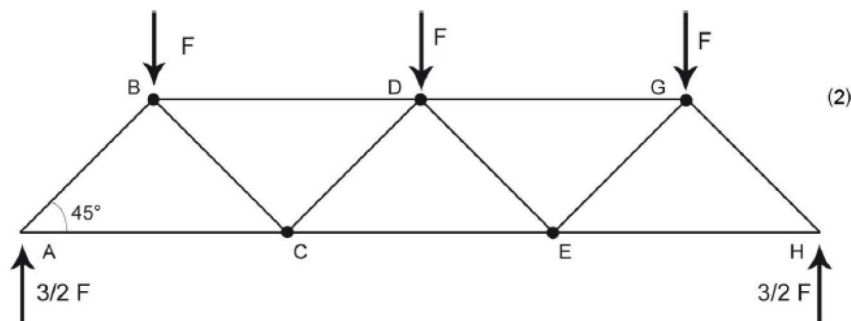


FIGURA 13: Carichi applicati e reazioni vincolari

Dopo aver calcolato le reazioni vincolari, per mettere in evidenza le azioni di contatto (che in questo caso sono gli sforzi normali nelle aste) dobbiamo effettuare un *taglio virtuale* della struttura in due parti tramite una sezione di Ritter. Si dice sezione di Ritter una sezione che divide in due la struttura tagliando tre aste non convergenti nello stesso nodo.

Una volta effettuato il taglio virtuale, si mettono in evidenza gli sforzi normali agenti sulle sezioni delle aste tagliate (vedi Figura 14):

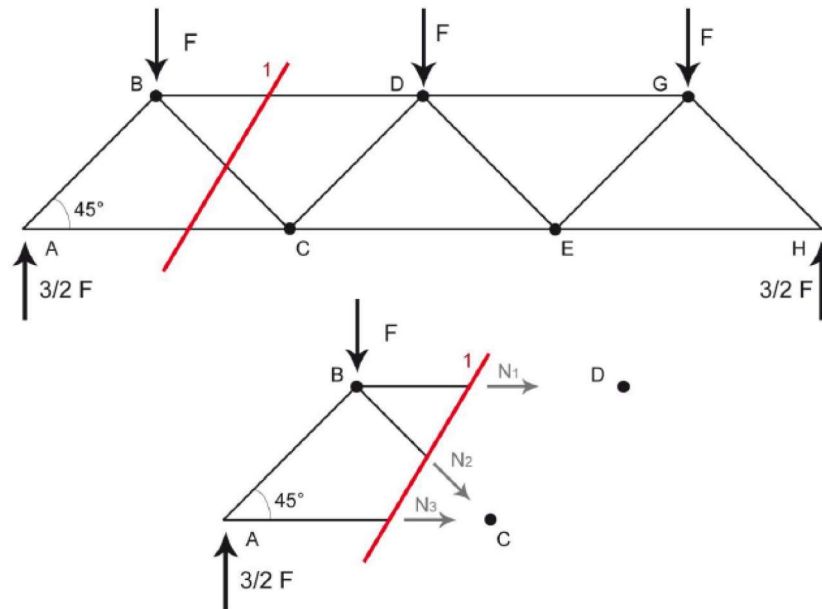


FIGURA 14: Taglio virtuale tramite una sezione di Ritter

Posso scegliere di considerare la parte di trave che va da A ad H, o quella che va da H ad A, poiché su qualunque parte decida di lavorare il risultato sarà invariato. Scelgo di lavorare nella prima metà semplicemente perché ci sono meno forze applicate ed i calcoli risulteranno più rapidi.

Disegnare le forze  $N_1$ ,  $N_2$  ed  $N_3$  uscenti dalla sezione vuol dire considerare in prima ipotesi che le aste sezionate siano sottoposte a *trazione* (tiranti).

A questo punto, per determinare i valori di  $N_1$ ,  $N_2$  ed  $N_3$ , userò l'assioma di bilancio che sancisce - per una struttura deformabile - l'equilibrio di tutte le forze agenti sulla generica parte. In questo caso, la parte sarà quella disegnata in Figura 14. Le incognite sono tre e le equazioni di bilancio a nostra disposizione sono tre. Quindi il problema è risolvibile.

La regola che viene suggerita è quella di scrivere tre equazioni di equilibrio a rotazione, cambiando ogni volta il polo, che viene scelto nel punto di incontro di due delle tre aste tagliate.

Nel nodo C convergono due delle tre aste sezionate; ciò implica che nell'equazione di equilibrio del momento rispetto a C, rimarrebbe una sola forza incognita, ossia l'azione di contatto dell'asta che non converge in C.

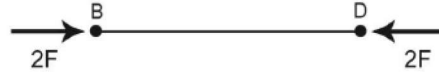
- Equilibrio a momento rispetto al nodo C:

$$-N_1 l - 3/2 F (2l) + Fl = 0$$

$$\Rightarrow N_1 = F - 3/2 F$$

$$\Rightarrow N_1 = -2F$$

$N_1$  è risultato negativo, per cui ne concludiamo che l'asta BD è un **puntone**:



- Equilibrio a momento rispetto al nodo B:

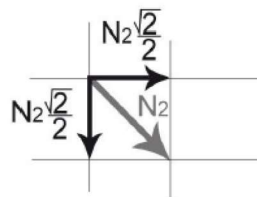
$$N_3 l - 3/2 Fl = 0$$

$$\Rightarrow N_3 = 3/2 F$$

Quindi ( $N_3$ ) è positivo, e l'asta AC è un **tirante**:



Per calcolare  $N_2$  potrei imporre l'equilibrio a momento intorno al nodo A (in questo caso il braccio della forza sarebbe uguale alla lunghezza dell'asta AB), o più comodamente l'equilibrio alla traslazione verticale dell'intera sezione (che si può anche interpretare come l'equilibrio a momento rispetto ad un punto che si trova all'infinito). Optiamo per questa seconda azione. La forza  $N_2$  è decomponibile in due forze, l'una orizzontale, l'altra verticale:



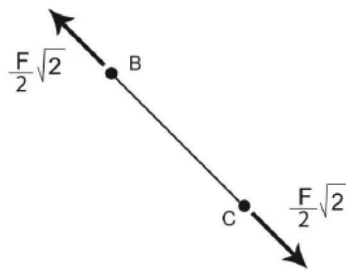
L'equilibrio alla traslazione verticale della parte sarà dunque:

$$3/2 F - N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0$$

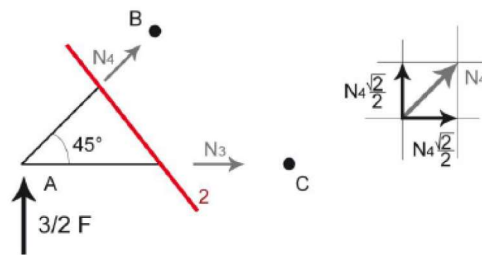
$$N_2 = (3/2 F - F) \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$N_2 = F \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Essendo  $N_2$  un valore positivo, l'asta BC è un **tirante**:



Della prima parte di trave che stiamo studiando (vedi Figura 12) l'unica asta di cui non conosciamo il comportamento è l'asta AB, che non era stata sezionata. Andiamo a fare una seconda sezione di Ritter:

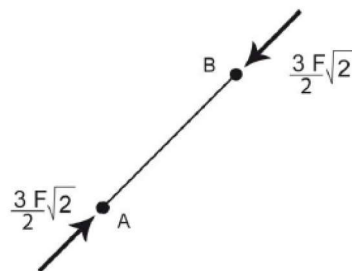


Conoscendo il valore di  $N_3$ , possiamo scrivere sia l'equilibrio alla traslazione verticale che l'equilibrio alla traslazione orizzontale, i cui risultati non potranno differire tra di loro. Dall'equilibrio alla traslazione verticale, otterremo:

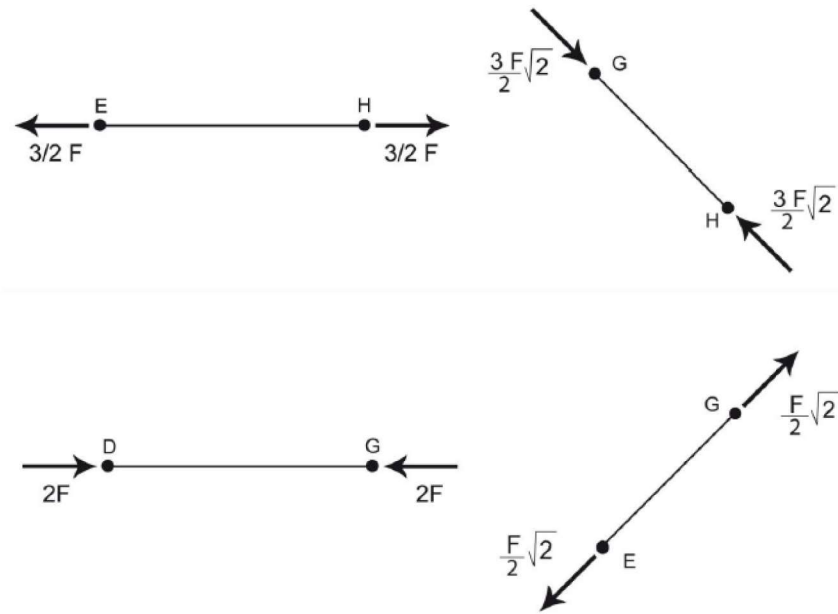
$$3/2F + N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$N_4 = -3F \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Con  $N_4$  di valore negativo, l'asta AB risulta essere un **puntone**:



Ovviamente la struttura è simmetrica, nonché caricata simmetricamente, per cui tutti i valori finora trovati li possiamo riportare sulla parte di trave che per ora non abbiamo considerato, ottenendo:



Per completare il calcolo dobbiamo selezionare una terza sezione, come ad esempio quella in Figura 15.

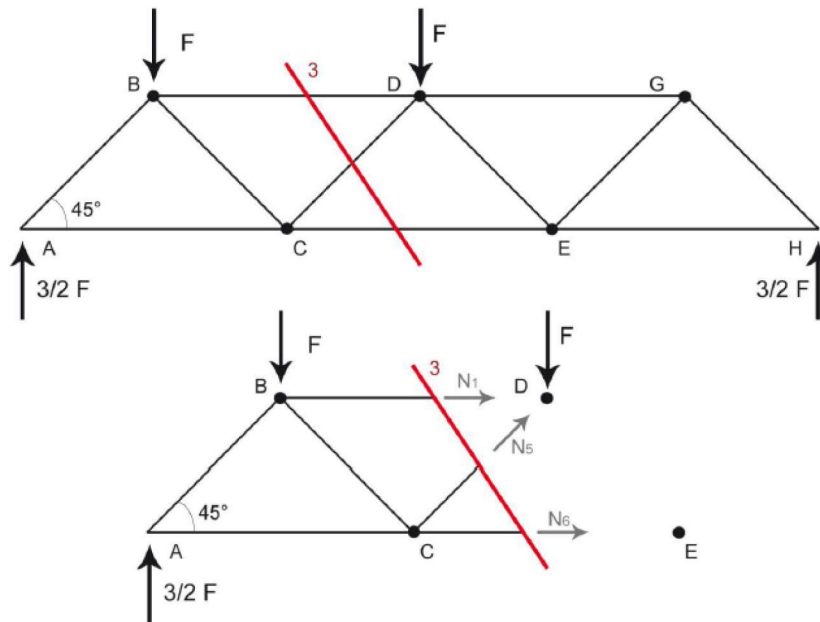


FIGURA 15: Terza sezione di Ritter

Di questa sezione conosciamo  $N_1$  perché è già stato calcolato, restano incogniti  $N_5$  e  $N_6$ , che sono anche le ultime due forze che ci servono per completare lo studio della struttura.

Osservando la sezione, si nota che il punto D si trova sulla stessa retta d'azione di  $N_1$  ed  $N_5$ , per cui dall'equilibrio a momento rispetto a D, ricaviamo immediatamente  $N_6$ :



$$N_6 l - 3/2 F(3l) + F2l = 0$$

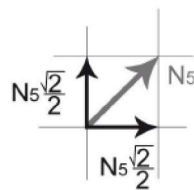
$$N_6 = 9/2 F - 2F$$

$$N_6 = 5/2 F$$

$N_6$  è positivo, di conseguenza l'asta CE è un **tirante**:



Per calcolare  $N_5$  possiamo imporre l'equilibrio orizzontale o verticale della parte, ricordando che posso scomporre la forza come segue:



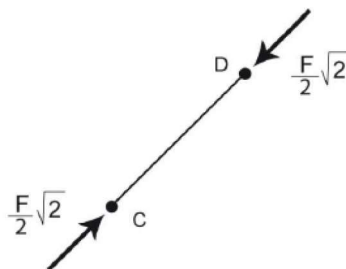
Dall'equilibrio alla traslazione verticale, otteniamo:

$$3/2 F - F + N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$N_5 = (F - 3/2 F) \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$N_5 = -F \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$N_5$  ha valore negativo, quindi l'asta CD è un **puntone**:



Complessivamente il sistema risulta essere il seguente:

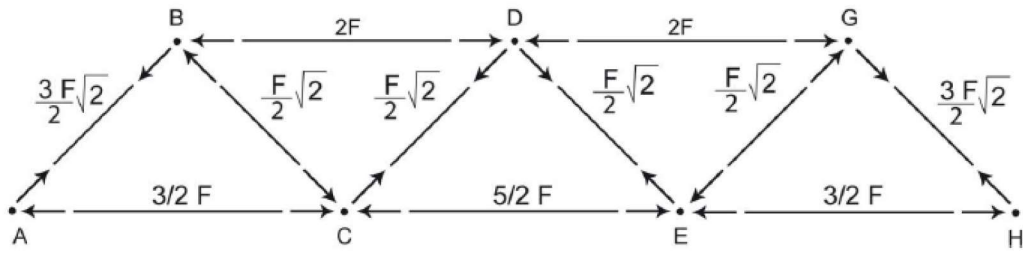


FIGURA 16: Sforzi normali della travatura reticolare isostatica